2015. 04.26. Ennek a megjegyzésnek a célja a felújítási egyenlet és annak megoldásának bemutatása.

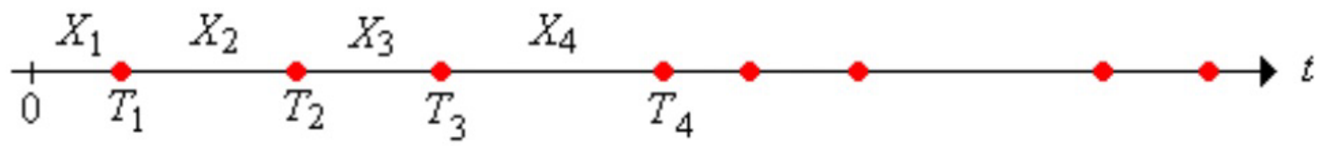
Felújítási folyamatok

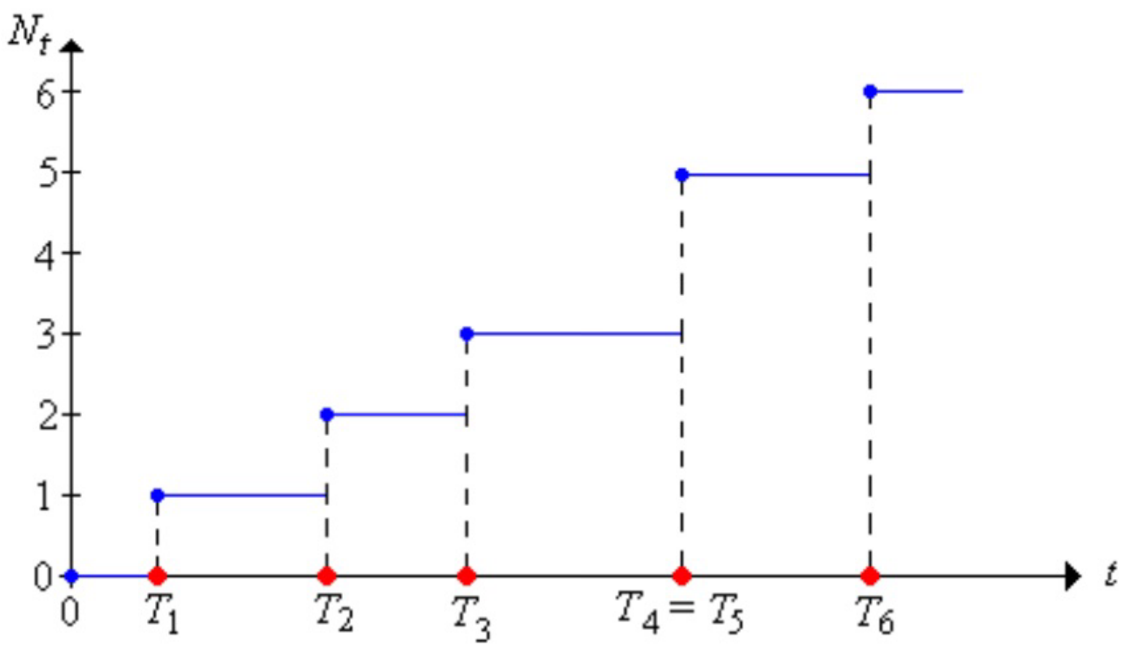
Legyen $\{N(t), t \geq 0\}$ egy nem-negatív, egészértékű folyamat, amely egy esemény egymás utáni bekövetkezéseit regisztrálja a $[0,t]$ időintervallumon. Az esemény $i-1$-edik bekövetkezésétől az i-edik bekövetkezéséig eltelt idő X_i, $i=1,2,\dots$
Feltesszük, hogy $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. & (természeténél fogva) pozitív v.v.. Jelölés: $\mu := E[X_i]$, $F(x) := P(X_k \leq x)$.
$T_0 := 0$, $T_n := X_1 + \dots + X_n$. $N(t) := \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$.
$F_n(x) := P(T_n \leq x)$.

Megjegyzés: Amikor $N(t)$ egy Poisson (λ) folyamat akkor: $X_i \sim Exp(\lambda)$ és $T_n \sim Gamma(n, \lambda)$ vagyis T_n sűrűség függvénye:

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \text{ ha } t \geq 0 \text{ \& } 0 \text{ ha } t < 0.$$

Nyilván $E[T_n] = n/\lambda$, $Var(T_n) = n/\lambda^2$.





Az ábrák a következő oldalról vannak:

http://www.math.bme.hu/~nandori/Virtual_lab/stat/renewal/Introduction.xhtml

Eddigi élettartam: $C(t) := t - T_{N(t)}$ (Current time)

Hátralévő élettartam: $E(t) := T_{N(t)+1} - t$ (excess or residual time)

teljes élettartam: $\beta_t := C(t) + E(t)$ (total lifetime).

Feltesszük, hogy $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$.

__Tétel:__ $\frac{T_n}{n} \to \mu$. (Nagy Számok Erős Törvényéből jön.)

__A felújítási függvény__ $M(t) := \mathbb{E}[N(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} F_j(t)$.

Az első egyenlőség pusztán definíció. A második a köv. megfontolás miatt igaz: Vegyük észre (l. fenti ábra), hogy $\{N(t) \geq j\} = \{T_j \leq t\}$. Innen:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) \geq j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_j \leq t) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} F_j(t)$$

A felújítási fv. jelentése: Várhatóan hány esemény következik be a $[0,t]$ intervallumon.

Használva a D file 11. Tétel (1)-et: $\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \cdot [M(t)+1]$.

A Poisson (λ) esetben: $\mathbb{P}(N(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Innen adódik, hogy $M(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$.

$E(t) = T_{N(t)+1} - t$. Gondoljuk meg, hogy:

$\{T_{N(t)+1} - t > x\} \Leftrightarrow (t, t+x]$-ben nem következik be esemény

$\Leftrightarrow \{N(t+x) - N(t) = 0\}$. Viszont:

$$\mathbb{P}(N(t+x) - N(t) = 0) = \mathbb{P}(N(x) = 0) = e^{-\lambda x}.$$ Tehát

$$\mathbb{P}(E(t) > x) = e^{-\lambda x}.$$

Szintén a Poisson (λ) esetben: $C(t)$:

Legyen $x < t$:

$C(t) = t - T_{N(t)}$. Vegyük észre, hogy:

$\{t - T_{N(t)} > x\} \Leftrightarrow (t-x, t)$-ben nem esik esemény $\Leftrightarrow$

$\{N(t) - N(t-x) = 0\}$.

$\mathbb{P}(N(t) - N(t-x) = 0) = \mathbb{P}(N(x) = 0) = e^{-\lambda x}$. Tehát $x<t$ esetén:

$\mathbb{P}(C_t > x) = e^{-\lambda x}$; $\mathbb{P}(C_t \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Ha $x>t$, akkor:

$\mathbb{P}(C_t > x) = 1$. Tehát:

$$\mathbb{P}(C(t) \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 \leq x < t \\ 1 & \text{ha } x \geq t. \end{cases}$$

Megint csak a Poisson (λ) esetben: teljes élettartam:

$$\underline{\beta_t} = C(t) + E(t) = \frac{1}{\lambda} + \int_0^t \mathbb{P}(C(t) > x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \int_0^t e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \underline{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)} > \mathbb{E}[T_{n+1} - T_n] = \frac{1}{\lambda}.$$

Együttes eloszlás:

$$\mathbb{P}\left(E(t)>x,\ C(t)>y\right)=\begin{cases} e^{-\lambda(x+y)}, & \text{ha } x>0 \ \& \ 0<y<t \\ 0 & \text{ha } y\geq t \end{cases}$$

Innen és a fentiekből adódik, hogy a Poisson(λ) esetben $C(t)$ & $E(t)$ függetlenek.

Definíció: Egy nem-negatív Z v.v. (& az ö eloszlása) d-aritmetikus, ha $\mathbb{P}(Z\in d\cdot\mathbb{N})=1$ és d maximális ezzel a tulajdonsággal. Ha Z nem d-aritmetikus semmilyen $d>0$-ra, akkor Z nem-aritmetikus.

Tétel: Ha $C(t)$ & $E(t)$ függetlenek egy olyan felújítási folyamatban, ahol az interarrival time-ok nem aritmetikusok, akkor ez a folyamat egy Poisson folyamat.

Tétel Tegyük fel, hogy az a függvény korlátos. Ekkor létezik egyetlen A függvény, amely a korlátos intervallumokon korlátos és kielégíti a következő egyenletet:

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-y)\,dF(y).$$

Ez a függvény pedig a következő formulával adott:

$$A(t)=a(t)+\int_0^t a(t-x)\,dM(x).$$

Hogyan határozzuk meg az $M(x)$-et?

$$M(t) = F(t) + \int_{\tau=0}^{t} M(t-\tau)\, dF(\tau).$$